Ad-Soyad :

Numara : Cevap Anahtarı

MAT 103 Lineer Cebir I Final Sınavı Soruları 25.01.2022

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız.

(D) Sonlu bir vektör uzayının her bazında aynı sayıda vektör vardır.

(D) Her iç çarpım uzayında lineer bağımsız her kümeden ortonormal bir küme elde edilebilir.

(Y) V=spU ise U,V nin bir bazıdır.

(Y) Her halka aynı zamanda bir cisimdir.

(D) Bir grupta her elemanın tersi vardır.

2) $\mathbb{R}^3$ standart iç çarpım uzayındaki $\underbrace{(-1,1,0)}_{u}, \underbrace{\left(-1-\sqrt{3},1-\sqrt{3},0\right)}_{v}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

$\measuredangle(u,v)=\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$ $\qquad \langle u,v\rangle = 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$

$\|u\|=\sqrt{2}, \|v\|=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

3) $\{(1,1,-1),(1,2,3),(0,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ alt kümesinin $\mathbb{R}^3$ için bir baz olup olmadığını araştırınız.

4) $\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ için $L(x)=L(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,-x_3)$ olarak tanımlanan $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olup olmadığını araştırınız.

5) $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için

$\langle x,y\rangle=\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1y_1+2x_2y_1+2x_1y_2+4x_2y_2$ olarak tanımlanan

$\langle\, ,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonun bir iç çarpım olup olmadığını araştırınız.

3) $c_1(1,1,-1)+c_2(1,2,3)+c_3(0,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$?

$(c_1+c_2,\ c_1+2c_2+c_3,\ -c_1+3c_2+c_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ c_1+2c_2+c_3=0 \\ -c_1+3c_2+c_3=0 \end{array} \Rightarrow$ $c_2=-c_1$ eşitliği 2. ve 3. eşitlikte yazılırsa

$c_1-2c_1+c_3=0$

$-c_1-3c_1+c_3=0$

$\Rightarrow$ $-1/\ -c_1+c_3=0$

$-4c_1+c_3=0$

$-3c_3=0$

$c_3=0$

$\Rightarrow c_1=0,\ c_2=0$

O halde, $\{(1,1,-1),(1,2,3),(0,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ lineer bağımsızdır.

$\text{boy}\,\mathbb{R}^3=3 \Rightarrow \{(1,1,-1),(1,2,3),(0,1,1)\}$ lineer bağımsız kümesi 3 elemanlı olduğundan $\mathbb{R}^3$ için baz olur.

4) $\forall x=(x_1,x_2,x_3),\ y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ ve $\forall c\in\mathbb{R}$ için

$L(cx+y)=cL(x)+L(y)$ midir?

$L(cx+y)=L(c(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))=L(cx_1+y_1,cx_2+y_2,cx_3+y_3)$

$=(cx_1+y_1,\ cx_2+y_2,\ -(cx_3+y_3))$

$=(cx_1+y_1,\ cx_2+y_2,\ -cx_3-y_3)$

$cL(x)+L(y)=c(x_1,x_2,-x_3)+(y_1,y_2,-y_3)$

$=(cx_1+y_1,\ cx_2+y_2,\ -cx_3-y_3)$

$\Rightarrow L(cx+y)=cL(x)+L(y)$ olup L bir lineer dönüşümdür.

5) $(-2,1)\in\mathbb{R}^2$ için $\|(-2,1)\|=\langle(-2,1),(-2,1)\rangle^{1/2}=0$ dır.

Fakat $(-2,1)\neq(0,0)$ olduğundan pozitif tanımlılık sağlanmaz. O halde, verilen fonksiyon bir iç çarpım değildir.